III Краевая заочная математическая олимпиада Читинского института Байкальского государственного университета

Условия задач

1. Найдите все трёхзначные числа, такие, что при любой перестановке цифр получившееся число делится на 27.
[*1 балл, привести только ответ*]

2. Решите уравнение в целых числах:

$$(2013 - x)(2014 - x)(2016 - x)(2017 - x) = 4$$

[*1 балл, привести только ответ*]

3. Пять работников должны были выполнить работу за десять дней. Когда они проработали один день, оказалось, что работу надо закончить через три дня. Сколько надо нанять работников дополнительно, чтобы выполнить работу в новые сроки?
[*1 балл, привести только ответ*]

4. Решите ребус: $\alpha \cdot \beta\gamma \cdot \gamma\beta = 20\beta\alpha$ (разным буквам соответствуют разные цифры; если какая-то цифра присутствует в ребусе явно, то она не может скрываться за буквой).
[*1 балл, привести только ответ*]

5. Можно ли произвольный прямоугольник разрезать на два равных шестиугольника?
[*1 балл, привести ответ в виде чертежа*]

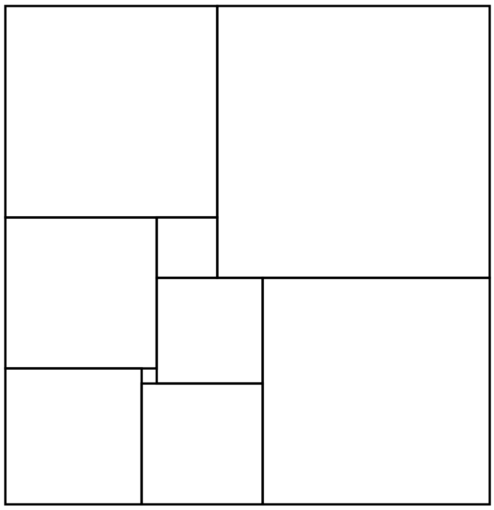
6. Три грани прямоугольного параллелепипеда имеют площади, равные 40, 45 и 72 см^2. Каков объем параллелепипеда?
[*1 балл, привести только ответ*]

7. Постройте график функции $y = |||||x+1|+2|+3|+4|+5|$.
[*1 балл, привести ответ в виде чертежа*]

8. В натуральном ряду 1, 2, 3, ... вычеркнули все числа, являющиеся точными квадратами. Какое число после этой операции оказалось на 2016 месте?
[*1 балл, привести только ответ*]

9. Груз первоначально погрузили в полувагоны грузоподъёмностью по 94 тонны, но один вагон остался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в полувагоны грузоподъёмностью по 69 тонн. При этом понадобилось на 4 вагона больше, и все равно один вагон остался загружен не полностью. Наконец, груз переложили в полувагоны грузоподъёмностью по 62 тонны. При этом понадобилось еще на 2 вагона больше, и все вагоны оказались полностью загруженными. Сколько было тонн груза?
[*1 балл, привести только ответ*]

10. Девять квадратов сложены в прямоугольник так, как показано на рисунке. У самого маленького квадрата длина стороны равна 1 см. Какова длина стороны квадрата, следующей по величине после самой маленькой? Какова площадь прямоугольника?



[*1 балл, привести только ответ*]

11. Числа a, b, c таковы, что $a^2 - bc = 7$, $b^2 + ac = 7$ и $c^2 + ab = 7$. Найдите значение выражения $a^2 + b^2 + c^2$.
[*3 балла, привести решение и ответ*]

12. Числа a, b, c, d, e таковы, что

$$a + b + 1 = b + c - 2 = c + d + 3 = d + e - 4 = e + a + 5.$$

Расположите эти числа в порядке возрастания.
[*3 балла, привести решение и ответ*]

13. Свежий огурчик содержит 99% воды. После того, как он полежал на солнышке, в нем стало 98% воды. Какой процент массы потерял огурчик, полежав на солнышке?
[*3 балла, привести решение и ответ*]

14. Чебурашка и крокодил Гена по очереди съедают конфеты из кучи: на первом ходу Чебурашка съедает одну конфету, на втором ходу Гена съедает из этой кучи две конфеты, затем на третьем ходу Чебурашка съедает три, Гена на четвертом ходу съедает четыре, и так далее. Если количество оставшихся конфет будет меньше, чем должен съесть на текущем ходу Чебурашка или Гена, тогда тот, кто ходит, съедает все конфеты. Оказалось, что Чебурашка съел 65 конфет. Сколько конфет было в куче первоначально?
[*3 балла, привести решение и ответ*]

15. Каждое утро Коля выходит из дома, когда часы показывают 8:49, и идёт до школы 10 минут, чтобы появиться в классе ровно за минуту до звонка. Какого числа Коля впервые опоздает на урок, если с трёх часов утра в понедельник 10 октября часы начнут отставать на 12 секунд в сутки?
[*3 балла, привести решение и ответ*]

16. По обвинению в ограблении перед судом предстали Иванов, Петров, Сидоров. Следствием установлено: 1. если Иванов не виновен или Петров виновен, то Сидоров виновен; 2. если Иванов не виновен, то Сидоров не виновен. Виновен ли Иванов?
[*3 балла, привести решение и ответ*]

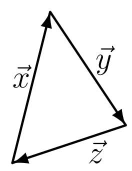
17. Вычислите значение выражения:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{0}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2015}}$$

[*3 балла, привести решение и ответ*]

18. Всё ли верно в рассуждениях?

На плоскости даны три вектора $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$, как показано на рисунке.



Любые два из этих трёх векторов неколлинеарны. Следовательно, взяв два из них, например, $\vec{x}$ и $\vec{y}$, можно разложить через них третий вектор: $\vec{z}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}$.

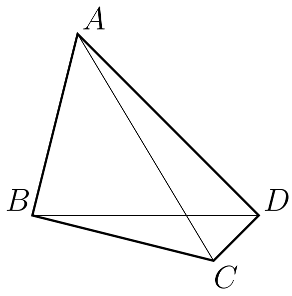
Так как начало первого вектора совпадает с концом последнего, то сумма этих векторов равна нуль-вектору: $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=\vec{0}$. Подставляя в это равенство разложение вектора $\vec{z}$ по векторам $\vec{x}$ и $\vec{y}$, получаем: $\vec{x}+\vec{y}+\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=\vec{0}$. Приводя подобные слагаемые, получаем: $(1+\alpha)\vec{x}+(1+\beta)\vec{y}=\vec{0}$, откуда окончательно мы получаем $\vec{y}=-\dfrac{1+\alpha}{1+\beta}\vec{x}$. Так как вектор $\vec{y}$ равен вектору $\vec{x}$, умноженному на число $-\dfrac{1+\alpha}{1+\beta}$, то это говорит о том, что $\vec{y}$ и $\vec{x}$ коллинеарны! Мы пришли к неожиданному результату. Как такое может быть?
[*3 балла, привести решение и ответ*]

19. Пловец, двигаясть против течения, потерял под мостом флягу, но заметил это только через 3 минуты. Повернув назад, он догнал флягу в 100 м от моста. Найдите скорость течения реки (в метрах в минуту).
[*3 балла, привести решение и ответ*]

20. При каких значениях параметра α уравнения $x^2+2x+\alpha=0$ и $x^2+\alpha x+2=0$ имеют общий корень?
[*6 баллов, привести решение и ответ*]

21. В $\triangle ABC$ проведена биссектриса BD и на неё опущен перпендикуляр AK, так что точка K оказалась на отрезке BD. Прямая, проходящая через точку K параллельно стороне BC, пересекает стороны AB и AC соответственно в точках M и N. Докажите, что MN — средняя линия $\triangle ABC$.
[*6 баллов, привести решение и ответ*]

22. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, у которого $\angle ABC=\angle CDA=90°$, $\angle BCD>\angle BAD$ (см. рис.). Докажите, что $AC>BD$.



[*6 баллов, привести решение и ответ*]

23. Найдите значение дроби $\dfrac{266\ldots6}{66\ldots65}$, где вместо точек стоят шестерки, а числитель и знаменатель дроби состоят из 2016 цифр.
[*6 баллов, привести решение и ответ*]

24. Последовательность задана формулой $x_n = 3n + 5p$, где n и p — натуральные числа. Могут ли три подряд идущих члена последовательности являться сторонами прямоугольного треугольника?
[*6 баллов, привести решение и ответ*]

25. В одном сосуде находится 5 л 17%-ного (по объему) раствора спирта, а в другом 3 л раствора такого же спирта, но иной концентрации. Из каждого сосуда в отдельные ёмкости отлили равное количество жидкости, и взятое из первого сосуда вылили во второй, а взятое из второго вылили в первый. Сколько литров было взято из каждого сосуда, если в результате в них оказался раствор одной и той же концентрации?
[*6 баллов, привести решение и ответ*]

26. Найдите наименьшее значение выражения x^2+y^2, если вещественные числа x и y таковы, что $x^2 + 10x + y^2 - 24y - 27 = 0$.
[*6 баллов, привести решение и ответ*]

27. Найдите все пары целых чисел $(a; b)$, для которых уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + 2015 = 0$$

имеет три различных и отличных от единицы корня.
[*9 баллов, привести решение и ответ*]

28. Вычислите значение выражения:

$$\frac{4 \cdot 2015^4 + 2016^4}{2015^2 + 4031^2} - \frac{4 \cdot 2015^4 + 2014^4}{2015^2 + 4029^2}$$

[*9 баллов, привести решение и ответ*]

29. В остроугольном $\triangle ABC$ на стороне AB взята точка H так, что CH — биссектриса. Из точки H на стороны CB и CA опущены перпендикуляры HD и HF соответственно, $4AC = 3BC$, $\angle ACB = 60^\circ$, $HD = 14\sqrt{3}$. Найти стороны $\triangle ABC$.
[*9 баллов, привести решение и ответ*]

30. Пусть непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $f(x)$ такова, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$f(1) = 1,$$
$$f(x+5) \geqslant f(x) + 5,$$
$$f(x+1) \leqslant f(x) + 1.$$

Пусть $g(x) = f(x) - x + 1$. Вычислить $g(2016)$.
[*9 баллов, привести решение и ответ*]